Emil Pauls Beitrag zum Maximalproblem der Dame

Philipp Lamby

9. Januar 2020

Zusammenfassung

In zwei Artikel in der Deutschen Schachzeitung[1] beschäftigte sich Emil Pauls, Apotheker und Lokalhistoriker aus Kornelimünster, mit dem Maximalproblem der Dame auf dem $n \times n$-Brett. In seiner Biographie wird uns versprochen, dass in „dieser Abhandlung [...] Pauls zwei alte Schachprobleme endgültig vermittelst der mathematischen Permutationslehre gelöst“ habe.[2] Tatsächlich stoßen wir hier auf ein interessantes kleines Stück Mathematikgeschichte, das wir hier ausführlich erzählen wollen.

1 Vorgeschichte

Das Maximalproblem der Dame ist neben dem Rösselsprung wohl das bekannteste schachmathematische Rätsel. Es hat seinen Ursprung in der Schachzeitung, wo 1848 von einem anonymen „Schachfreunde“ die folgende Frage gestellt wurde:[3]

> „Wie viele Steine mit der Wirksamkeit der Dame können auf das im Uebrigen leere Brett in der Art aufgestellt werden, dass keiner den andern angreift und deckt, und wie müssen sie aufgestellt werden?“

Es ist erst mal von vorneherein klar, dass die Anzahl der Damen nicht größer als acht sein kann, weil ja in jeder Reihe nur eine Dame stehen kann. Dass es tatsächlich möglich ist, acht Damen konfliktfrei auf dem Brett unterzubringen, bewies die Schachzeitung dann selbst ein paar Monate später, indem sie die beiden folgenden Stellungen angab. [4] Die Redaktion bemerkte noch dazu, dass sich solcher Art „eine ungemein große Anzahl von Positionen finden“ lasse.

Im Folgejahr brachte die in Leipzig erscheinende *Illustrirte Zeitung* drei Artikel zu dem Thema, die von einem gewissen Franz Nauck verfaßt worden waren.[5] Er fand insgesamt 92 Lösungen für das normale 8×8-Brett und behauptete, dass er damit alle möglichen Lösungen erfaßt habe, womit er recht hatte, auch wenn er keinen Beweis dafür lieferte.

[1] Schachzeitung, 29. Jg. (1874), S.129-134 und S.257-267.

[2] Richard Pick, Archivdirektor: *Zur Erinnerung an Emil Pauls*, Sonderdruck aus Band 33 der Zeitschrift des Aachener Geschichtsvereins Aachen, 1912, S. 9.

[3] Schachzeitung, 4. Jg. (1848), S.363. Laut Dr. M.Lange, *Handbuch der Schachaufgaben*, Leizpig 1862, handelte es sich bei dem ungenannten Schachfreund um Max Bezzel aus Ansbach.

[4] Schachzeitung, 4. Jg. (1849), S.40

[5] Illustrirte Zeitung (1850) Nr. 361, 1. Juni, S.352; Nr. 365, 29. Juni, S.416; Nr. 377, 21. September, S.182.

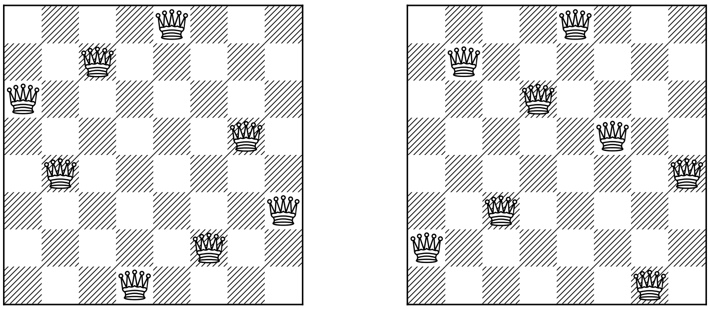


Abbildung 1: Die beiden Lösungen der Deutschen Schachzeitung

Durch die Lektüre der *Illustrirten Zeitung* hatte auch der berühmte Mathematiker Carl Friedrich Gauß von dem Problem Notiz genommen. In einem Briefwechsel machte er den Astronomen H.C. Schumacher auf die Artikel aufmerksam, was dazu führte, dass später in der mathematischen Literatur häufig Gauß als Urheber des Problems genannt wurde und nicht Bezzel oder Nauck.[6] Gauß verwandte nicht viel Zeit auf das Problem: „Es liesse sich leicht über diese Gegenstände noch 1 oder ein Paar Bogen vollschreiben, aber man muss aufzuhören wissen.“ Aber trotzdem machte ein paar nützliche Beobachtungen.[7]

Zuerst einmal notierte Gauß nur „die Numerirung der Horizontalreihen [...], in welche die Königin in den aufeinander folgenden Verticalreihen zu placiren ist“, also z.B. $6\ 4\ 7\ 1\ 8\ 2\ 5\ 3$ für die im ersten Diagramm angegebene Lösung. Da ja keine zwei Damen in der gleichen Reihe stehen können, entspricht jede gültige Aufstellung der Damen einer Permutation der Zahlen 1 bis 8.

Desweiteren bemerkte er, dass man auch ohne die Figuren auf dem Brett aufzubauen, sehr leicht prüfen kann, ob zwei Damen auf der gleichen Diagonalen stehen. Für Felder auf der gleichen abwärts weisenden Diagonalen ist nämlich immer die Summe von Reihennummer und Liniennummer gleich, und bei aufsteigenden Diagonalen gilt entsprechendes für die Differenzen derselben, siehe Abbildung 2.

Gauß entwickelte daraus nun das folgende kleine Schema, mit dem er prüfen konnte, ob eine beliebige Permutation, z.B. die von oben, zu einer Lösung des Damenproblems korrespondiert. Dazu addierte bzw. subtrahierte er einfach die Liniennummern von 1-8 zu den Gliedern der Permutation und sah sich die Ergebnisse an:

$$
\begin{array}{cccccccc}
6 & 4 & 7 & 1 & 8 & 2 & 5 & 3 \\
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\
\hline
7 & 6 & 10 & 5 & 13 & 8 & 12 & 11
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rrrrrrrr}
6 & 4 & 7 & 1 & 8 & 2 & 5 & 3 \\
-1 & -2 & -3 & -4 & -5 & -6 & -7 & -8 \\
\hline
5 & 2 & 4 & -3 & 3 & -4 & -2 & -5
\end{array}
$$

Dass in der unteren Reihe links acht verschiedene Zahlen stehen, bedeutet dass die acht

[6] Man sehe dazu P.J. Campbell: *Gauss and the eight queens problem; a study in miniature of the propagation of historical error*. Historia Mathematica 4 (1977), S.397-404.

[7] Briefwechsel zwischen C.F. Gauss und H.C. Schumacher. Herausgegeben von C.A.F. Peters, Sechster Band, Altona 1865, S. 117-122, No. 1312: Gauss an Schumacher, 27. September 1850

	1	2	3	4	5	6	7	8
8	9	10	11	12	13	14	15	16
7	8	9	10	11	12	13	14	15
6	7	8	9	10	11	12	13	14
5	6	7	8	9	10	11	12	13
4	5	6	7	8	9	10	11	12
3	4	5	6	7	8	9	10	11
2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	3	4	5	6	7	8	9

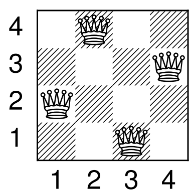
	1	2	3	4	5	6	7	8
8	7	6	5	4	3	2	1	0
7	6	5	4	3	2	1	0	-1
6	5	4	3	2	1	0	-1	-2
5	4	3	2	1	0	-1	-2	-3
4	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4
3	2	1	0	-1	-2	-3	-4	-5
2	1	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6
1	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7

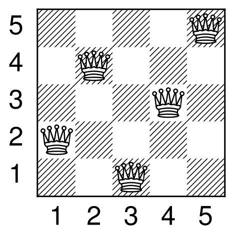
Abbildung 2: links: Summen von Reihenummer und Liniennummer, rechts: Differenzen von Reihennummer und Liniennummer.

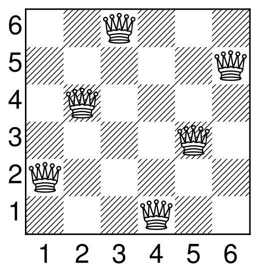
Damen auf verschiedenen Abwärtsdiagonalen stehen, und dass in der unteren Reiche rechts acht verschiedene Zahlen stehen, bedeutet, dass die acht Damen sich auch nicht gemeinsam auf irgendeiner Aufwärtsdiagonalen aufhalten. So haben wir also noch mal arithmetisch bestätigt, dass die Zahlenfolge 6 4 7 1 8 2 5 3 eine Lösung des 8-Damenproblems darstellt.[8]

Jedenfalls war mit den Artikeln in der Illustrirten Zeitung das Dameproblem auf dem normalen 8×8-Brett mehr oder weniger erledigt und Nauck schlug vor, als nächstes das gleiche Problem auf beliebigen Brettern der Größe $n \times n$ zu betrachten.

Wie man leicht sieht, ist es auf dem 2×2-Brett und dem 3×3-Brett nicht möglich, zwei bzw. drei Damen konfliktfrei hinzustellen. Für das 4×4, 5×5 und 6×6-Brett findet man aber leicht z.B. die folgenden Stellungen:







Intuitiv möchte man denken, dass es um so mehr Möglichkeiten geben sollte, n Damen auf dem $n \times n$-Brett zu postieren, desto größer n ist. Das ist auch im Prinzip richtig, aber tatsächlich ist es gar nicht so einfach, für große n auch nur eine einzige brauchbare Aufstellung konkret anzugeben. Es stellte sich also erst mal die folgende Frage:

„Angenommen $n \geq 4$. Kann man dann immer n Damen auf das $n \times n$-Brett stellen, so dass keine Dame eine andere angreift?“

Eine Antwort darauf wurde trotz einschlägiger Bemühungen viele Jahre nicht gefunden.

[8]Genau genommen subtrahierte Gauß nicht die Zahlen von 1 bis 8, sondern addierte stattdessen die Zahlen von 8 bis 1. Gauß betrachtete das Brett also beim zweiten Mal einfach spiegelverkehrt.

2 Pauls' Lösung der Existenzfrage

Tatsächlich war es Pauls, der als erster für beliebige Werte von n ein Verfahren beschrieb, mit denen man dieses n-Damenproblem lösen kann. Dazu gab er zwei Regeln an, wie man eine Permutation hinschreiben kann, die einer gültigen Aufstellung der n Damen entspricht. Die eine Regel funktioniert, wenn n eine Zahl ist, die bei der Division durch 6 den Rest 0 oder 4 hinterläßt. Die andere funktioniert, wenn der Rest 2 beträgt, wenn n also in der Form $n = 6x + 2$ mit einer natürlichen Zahl x dargestellt werden kann. Für ungerade n ergibt sich die Lösung dann durch eine einfache Erweiterung. Dies alles wollen wir uns nun im Detail ansehen.

Wir betrachten also als erstes den Fall, dass n gerade ist und bei der Division durch 6 nicht den Rest 2 hinterläßt. Pauls macht uns die folgende Vorschrift:

> „Man schreibt in ununterbrochener Reihenfolge von 2 an zunächst die geraden Zahlen und reiht daran in gleicher Weise die ungeraden Zahlen der Ziffern zwischen 1 und n. Sei z. B. gegeben ein Schachbret von 12 Feldern, also $n = 12$, so würde geschrieben: 2, 4, 6, 8, 10, 12, 1, 3, 5, 7, 9, 11."

Im Fall $n = 12$ sieht die dazugehörige Aufstellung wie folgt aus. Dabei spielt die Farbe der Damen keine Rolle sondern soll nur bei den folgenen Erläuterungen helfen. Die Konfiguration ist symmetrisch bzgl. einer Drehung des Bretts um 180 Grad. Arithmetisch kann man das übrigens daran erkennen, das die Summe des ersten und des letzten Gliedes, des zweiten und des vorletzten Gliedes usw. immer den gleichen Wert, nämlich $n + 1 = 13$ beträgt.

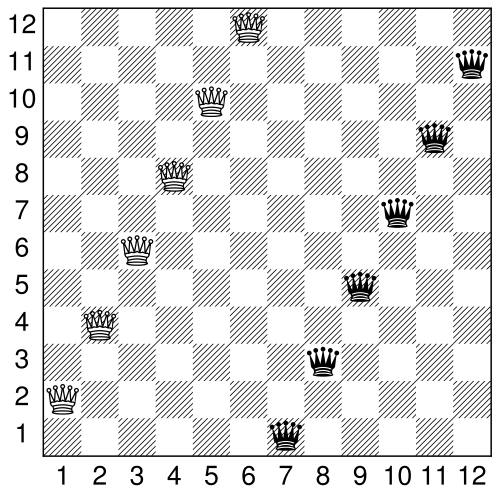


Abbildung 3: Pauls Lösung für $n = 12$

Erst mal ist leicht zu sehen, dass keine Dame mit einer anderen auf einer aufsteigenden Diagonale liegt, denn alle weißen Damen stehen auf einer Rössellinie oberhalb der großen Diagonalen und alle schwarzen Damen auf einer Rössellinie unterhalb der großen Diagonalen. Wir müssen also nur prüfen, ob sich nicht eine weiße und eine schwarze Dame zufällig auf derselben absteigenden Diagonale befinden könnten. Pauls argumentiert dabei etwas umständlich und schreibt analog zu Gauß' Verfahren das folgende Schema hin:

$$\begin{array}{ccccc|ccccc}
2 & 4 & 6 & \dots & n & 1 & 3 & 5 & \dots & n-1 \\
1 & 2 & 3 & \dots & \frac{n}{2} & \frac{n}{2}+1 & \frac{n}{2}+2 & \frac{n}{2}+3 & \dots & n \\
\hline
3 & 6 & 9 & \dots & \frac{3}{2}n & \frac{n}{2}+2 & \frac{n}{2}+5 & \frac{n}{2}+8 & \dots & 2n-1
\end{array}$$

Das Bildungsgesetz für die Summen ist nun leicht zu erkennen. Für die weißen Damen erhalten wir eine arithmetische Reihe mit Termen der Form $3k$, und für die schwarzen Damen erhalten wir eine Reihe mit Termen der Form $\frac{n}{2} + 3j - 1$, wobei k und j jeweils die Zahlen von 1 bis $n/2$ durchlaufen. [9] Wir müssen nun also prüfen, ob für igendwelche Werte von k und j jemals

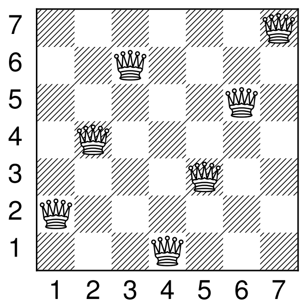
$$2k + 2 = \frac{n}{2} + 3j - 1$$

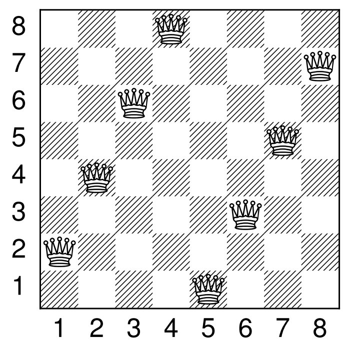
werden kann. Diese Gleichung kann man elementar umformen in die Gestalt

$$6(k - j) + 2 = n.$$

Diese Gleichung bedeutet aber gerade, dass n ein Vielfaches von 6 plus 2 sein müsste, was wir ja gerade ausgeschlossen haben. Die Gleichung ist also nicht erfüllbar und somit bewiesen, dass Pauls Aufstellung der Damen, keine Schlagmöglichkeit beinhaltet, wenn n gerade ist und bei der Division durch 6 Rest 0 oder 4 läßt.

Außerdem ist klar, dass bei der oben angegebenen Konstruktion keine Dame auf der langen Diagonale zu stehen kommt. Falls also die Division $n/6$ den Rest 1 oder 5 hinterläßt, kann man das n-Damenproblem lösen, indem man die Konstruktion für das $(n-1) \times (n-1)$-Brett aufbaut und die letzte Dame in die rechte obere Ecke stellt. Für $n = 7$ ist dies im folgenden Diagramm links vorgemacht. Im rechten Diagramm, in dem $n = 8$ ist, erkennt man aber auch sofort, was schief läuft, wenn $n/6$ den Rest 2 lässt.





[9]Dieses Ergebnis hätte Pauls natürlich auch gleich haben können, wenn er einfach festgestellt hätte, dass die weißen Damen auf den Feldern $(k, 2k)$ und die schwarzen Damen auf den Feldern $(\frac{n}{2} + j, 2j - 1)$ stehen, also die Summen von Reihen- und Liniennummer jeweils $3k$ bzw. $\frac{n}{2} + 3j - 1$ betragen.

Für den Fall $n = 6x + 2$ gibt Pauls eine andere, kompliziertere Konstruktion an:

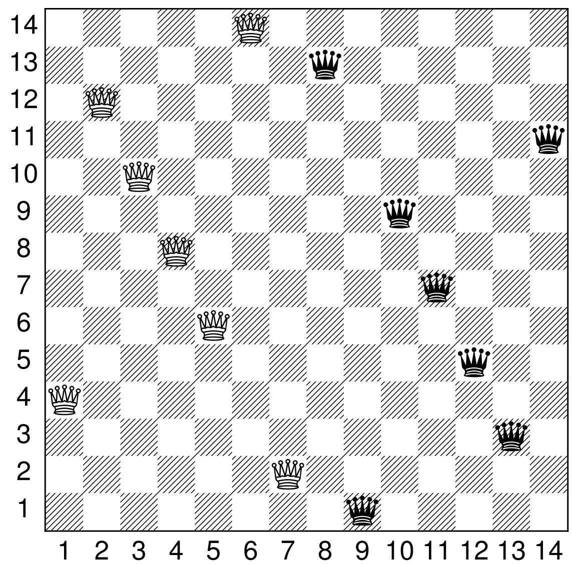
> „Man theilt die Zahlen zwischen 1 bis n in zwei Gruppen, deren erste die geraden, die andere die ungeraden Ziffern umfasst. Die Reihe der geraden Zahlen beginnt mit 4 und schliesst mit den drei Zahlen 6, n, 2. Zwischen 6 und 4 werden von rechts nach links die geraden Zahlen, welche zwischen 6 und n–2 liegen, in ununterbrochener Reihenfolge hingeschrieben. Die einzelnen Glieder der Gruppe der ungeraden Zahlen correspondieren mit den Gliedern der Gruppe der geraden Zahlen in der Art, dass die Summe des ersten Gliedes der geraden und des letzten Gliedes der ungeraden Gruppe $= n + 1$ ist, dass die Summe des zweiten Gliedes der geraden und des vorletzten Gliedes der ungeraden Gruppe ebenfalls $= n + 1$ ist und so fort bis zum letzten Gliede der geraden Zahlengruppe, welches mit dem ersten Gliede der ungeraden Zahlenreihe (gleich allen übrigen correspondierenden Gliedern) $n + 1$ in Summa ausmacht.“

Bei $n = 8$ und $n = 14$ lautet die Zahlenfolgen also z.B.

$$4, 6, 8, 2 \mid 7, 1, 3, 5 \quad \text{bzw.}$$

$$4, 12, 10, 8, 6, 14, 2 \mid 13, 1, 9, 7, 5, 3, 11.$$

Die Lösung für $n = 14$ zeigt das folgende Diagramm.



Wie man sich vorstellen kann, wird der Beweis, dass keine zwei dieser Damen sich die gleichen Diagonale teilen, viel komplizierter, denn das Muster ist nun doch etwas unregelmäßiger. Genau an dieser Stelle läßt Pauls seine Leser im Regen stehen und arbeitet die Details nicht aus. Stattdessen bedient er sich eines „Tricks“, der auch heute noch gerne von schreibfaulen Mathematikern strapaziert wird, und beruft sich auf eine „Untersuchung, welche in analoger Weise wie oben [...] anzustellen ist“. Vielleicht hat aber auch die Redaktion der Schachzeitung aus Platzgründen auf dieser Abkürzung bestanden. Wir jedenfalls haben hier Platz genug und wollen die Angelegenheit Schritt für Schritt prüfen.

- Zuerst mal stellen wir fest, dass die meisten weißen Damen auf einer Springerlinie stehen, deren Felder durch die Koordinaten $(k, n + 2 - 2k)$ gegeben sind. Entsprechend hat die Springerlinie, auf der die meisten schwarzen Damen stehen, die Koordinaten $(n + 1 - j, 2j - 1)$, wobei k und j die Zahlen von 2 bis $\frac{n}{2}$ durchlaufen, ausgenommen $\frac{n}{2} - 1$.

- Da sich diese Springerlinien ganz unterhalb, bzw. ganz oberhalb der abwärts führenden großen Diagonale befinden, kann sich keine weiße Dame mit keiner schwarzen Dame gemeinsam auf einer abwärts führenden Diagonal befinden.

- Um zu prüfen, ob sich eine weiße und eine schwarze Dame auf einer aufwärts weisenden Diagonale ins Gehege kommen könnten, betrachten wir die Differenzen von Reihennummern und Liniennummern. Diese sind $n+2-3k$ bzw. $3j-n-2$. Setzen wir diese gleich, so erhalten wir nach kurzer Umformung die Gleichung $2n = 3(j + k) - 4$. Wir hatten vorausgesetzt, dass n von der Form $6x + 2$ sein solle. Setzen wir dies ein, so erhalten wir die Gleichung $12x = 3(j + k) - 8$, die aber keine ganzzahlige Lösung hat, denn auf der linken Seite der Gleichung steht jedenfalls eine durch 3 teilbare Zahl und auf der rechten nicht. Also kommen sich die Damen, die auf den Springerlinien stehen, gegenseitig nicht ins Gehege.

- Als nächstes wollen wir uns vergewissern, dass nicht eine der beiden weißen Dame am linken bzw. oberen Rand eine andere weiße Dame angreift. Problematisch ist auch hier nur die Frage, ob dies eventuell entlang einer aufwärts führenden Diagonale geschehen könnte. Deswegen müssen wir wieder die Differenzen von Reihennummern und Liniennummern betrachten. Für die Dame auf $(1, 4)$ müssen wir also prüfen, ob jemals $3 = n+2-3k = 6x+4-3k$ sein kann. Dies kann man umstellen zu $3k-6x = 1$, wonach man wieder sieht, dass auf einen Seite der Gleichung eine durch drei teilbare Zahl steht und auf der anderen nicht. Die Dame auf (1,4) greift also keine andere weiße Dame an. Die Dame am oberen Rand steht auf dem Feld $(\frac{n}{2} - 1, n)$, hier müssen wir also die Gleichung $n+2-3k = \frac{n}{2}+1$ ansehen. Einsetzen von $n = 6x+2$ ergibt $6x+4-3k = 3x+2$, was zu $3(x - k) = 2$ vereinfacht werden kann. Diese Gleichung ist aber ebenfalls ganzzahlig unlösbar, denn 2 ist nicht durch 3 teilbar.

- Die weiße Dame am rechten Rand kommt auch keiner schwarzen Dame ins Gehege. Dies könnte ohnehin wieder nur auf einer aufwärts führenden Diagonale passieren, aber die Gleichung $3 = 3j - n - 2 = 3j - 6x - 4$ ist für ganzzahliges x ebenfalls nicht erfüllbar.

- Die weiße Dame am oberen Rand stört auch die schwarzen Damen nicht. Kritisch ist in diesem Fall nur die Frage, wo die von dieser Dame abwärts führende Diagonale die Springerlinie mit den schwarzen Damen schneidet, weswegen wir nun die Summen von Reihennummern und Liniennummern betrachten müssen. Für die weiße Einzeldame ist das $\frac{3}{2}n - 1$ und für die schwarzen Damen $n + j$. Setzt man dies gleich und vereinfacht so erhält man die Gleichung $j = n/2 - 1$. Das bedeutet aber, dass die von der oberen weißen Dame ausgehende Abwärtsdiagonale die schwarze Springerlinie genau auf dem Feld schneidet, auf dem die schwarze Dame fehlt. Es gibt also keinen Konflikt.

- Wegen der Symmetrie der Anordnung ist damit auch klar, dass die beiden schwarzen Ausnahmedamen keine Probleme machen.

Damit ist alles abgearbeitet und wir können mit Zuversicht feststellen, dass Pauls' Vorschrift für jedes beliebige n der Form $6x + 2$ eine gültige Aufstellung der Damen produziert.

Zuletzt überzeugen wir uns noch davon, dass bei dieser Konstruktion keine Dame auf einer der langen Diagonalen von links unten nach rechts oben plaziert wird. Daher können wir im Fall, dass das Brett um eine Reihe und Linie vergrößert wird, wieder eine Lösung des $n + 1$-Damenproblems finden, indem wir eine Dame in die rechte obere Ecke postieren.

Und damit ist der Beweis für die Richtigkeit der Pauls'chen Konstruktion vollständig erbracht.

3 Nachtrag

Nachdem er die Existenzfrage auf diese Art beantwortet hatte, er also gezeigt hatte, dass es für jedes $n \geq 4$ wenigstens eine Lösung des n-Damenproblems gibt, widmete sich Pauls der viel weitergehenden Frage nach der Anzahl dieser Lösungen: „Wie oft lassen sich auf einem Schachbrete von $n \times n$ Feldern n Damen so aufstellen, dass keine Dame die andere schlagen kann?“

Wie er selbst schrieb, ist die Lösung dieser Frage „bedeutend verwickelter und schwieriger“ und „erfordert indess für höhere Zahlen die denkbar mühsamsten und langwierigsten Berechnungen.“ Er stellte sich daher eine einfachere Aufgabe: „Wie gross ist die Anzahl der verschiedenen Stellungen, in welchen sich 3 Damen auf den $3n$ Feldern dreier neben einander liegenden Reihen eines Schachbretes befinden können, ohne dass eine von ihnen eine andere schlagen kann?“

Nach sorgfältiger Rechnung kam er zum Ergebnis $n^3 - 9n^2 + 30n - 36$. Pauls versprach sich davon, dass man die Methode, mit der an dieses Ergebnis kam, verallgemeinern kann und dann auch entsprechende Formeln für vierreihige, fünfreihige, etc. Bretter finden könne. Diese Hoffnung ist aber reichlich naiv. Tatsächlich beschäftigt das Problem, die Anzahl der möglichen Damenaufstellungen auf dem $n \times n$-Brett zu finden, die Mathematiker und Informatiker bis heute. Mit dem Einsatz massiver Computerressourcen hat man bisher (Stand 2019) die Werte bis $n = 27$ gefunden.

Letztenendes hat Pauls, was seine Arbeit zum n-Damenproblem angeht, das Schicksal vieler Amateurmathematiker eingeholt: seine Ergebnisse wurden häufig nicht zitiert oder gar anderen Autoren zugeschrieben. [10] Insofern hoffen wir, dass dieser Artikel die Dinge ins rechte Licht rückt.

[10] Z.B. John J. Watkins, *Across the Board. The Mathematics of Chess Board Problems.* Princeton University Press, 2004. In diesem bekannten Buch wird der Existenzbeweis W. Ahrens zugeschrieben, der seine Lösung, die nur minimal von Pauls' Lösung abweicht, erst 1901, also 27 Jahre nach Pauls veröffentlichte.